الحساب الحرفي

تمرين 1

بسط ما يلي : $A = 2x + 5 + 8x + 11$ ، $B = 7 - 5x - 3x^2 + x - 8 + 7x^2$ ، $C = ab + 2a - 7 + a - 5ab$

تمرين 2

أنشر و بسط : $A = 2(x-8) + 7$ ، $B = -6(1-x) - (10-x)$ ، $C = 2(1-x^2) + x(2x+3)$ ،
$D = (3x+4)(x-1)$ ، $E = (x-2)(2x-5) - 7(-10+4)$
$F = (x+3)^2$ ، $G = (2y-5)^2$ ، $H = (8x-7y)(8x+7y)$

تمرين 3

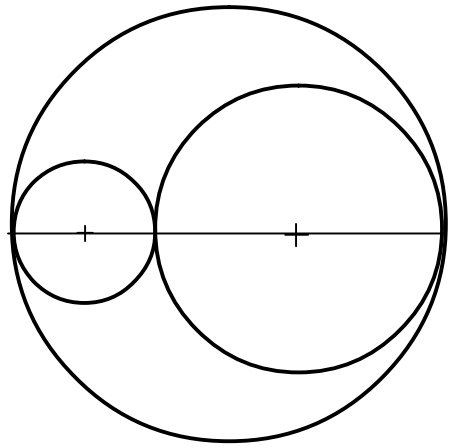
عمل ما يلي : $A = ab + 5b$ ، $B = 12x + 18$ ، $C = 5x - x^2$ ، $D = x + 5x^2 + 11x^3$
$E = (x-3)(x+7) - (5-x)(x-3)$ ، $F = 5(x+1) + (x+1)^2$
$G = x^2 + 4x + 4$ ، $H = x^2 - \frac{9}{64}$ ، $I = (2x-3)^2 - (x+1)^2$ ، $K = 100x^2 - 121$
$L = (x+1)^2 - x^4$

تمرين 4

من غرائب الرياضيات

الشكل جانبه يمثل رسما كرتونيا لوجه.
الرسم يتكون من 3 دوا ئر :
دائرة كبرى تمثل الرأس
دائرتان تمثلان العينين

قارن محيط العينين بمحيـط الرأس



الحساب الحرفـــي - حلول

تمرين 1

انتبه ← تعليق ←

لنبسط :

$A = 2x + 5 + 8x + 11$ $A = 2x + 8x + 5 + 11$ $A = 10x + 16$: لا يمكن تبسيط $10x$ و 16 فيما بينها لأننا بصدد الجمع و الطرح و ليس الضرب	$B = 7 - 5x - 3x^2 + x - 8 + 7x^2$ $B = 7 - 8 - 5x + x - 3x^2 + 7x^2$ $B = -1 - 4x + 4x^2$: لا يمكن تبسيط -1 و $-4x$ و $4x^2$ فيما بينها لأننا بصدد الجمع و الطرح و ليس الضرب الكتابة x تعني ضمنيا أن معامل x هو 1، بمعنى مثلا أن $3x + x = 4x$	$C = ab + 2a - 7 + a - 5ab$ $C = ab - 5ab + 2a + a - 7$ $C = -4ab + 3a - 7$

تمرين 2

انتبه ← تعليق ←

لننشر و نبسط :

$A = 2(x - 8) + 7$ $A = 2x - 16 + 7$ $A = 2x - 9$: النشر ينتهي بمجرد غلق الأقواس	$B = -6(1 - x) - (10 - x)$ $B = -6 + 6x - 10 + x$ $B = -6 - 10 + 6x + x$ $B = -16 + 7x$: تذكر قواعد الجمع : $-6 - 10 \neq +16$ بل $-6 - 10 = -16$ لأننا لسنا بصدد الضرب بل الجمع	$C = 2(1 - x^2) + x(2x + 3)$ $C = 2 - 2x^2 + 2x^2 + 3x$ $C = 2 + 3x$: $2x^2$ و $-2x^2$ متقابلان مجموعهما منعدم.	$D = (3x + 4)(x - 1)$ $D = 3x^2 - 3x + 4x - 4$ $D = 3x^2 + x - 4$: أثناء النشر نستعمل قاعدة القوى $x^n \times x^m = x^{n+m}$ $3x \times x = 3\ x^{1+1} = 3x^2$
$E = (x - 2)(2x - 5) - 7(-10 + 4)$ $E = 2x^2 - 5x - 4x + 10 + 70 - 28$ $E = 2x^2 - 9x + 80 - 28$ $E = 2x^2 - 9x + 52$: أثناء النشر يجب احترام قاعدة إشارة جداء: $(-7) \times (-10) = +70$ $(-7) \times (+4) = -28$	$F = (x + 3)^2$ $F = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2$ $F = x^2 + 6x + 9$: لا يصح استعمال الكتابة : $2x3$ و ذلك لأنه أثناء اختصار جداء أحد عامليه مجهول و الآخر معلوم يجب البدء بالمعلوم (من اليسار)	$G = (2y - 5)^2$ $G = (2y)^2 - 2 \times 2y \times 5 + 5^2$ $G = 4y^2 - 20y + 25$: $(2y)^2 = 2y \times 2y$ $(2y)^2 = 2 \times 2 \times y \times y = 4y^2$	$H = (8x - 7y)(8x + 7y)$ $H = (8x)^2 - (7y)^2$ $H = 64x^2 - 49y^2$: يمكنك نشر هذا الجداء بطريقة عادية لكن تعرفك على كونه يمثل المتطابقة الهامة الثالثة يجعل الحساب أسهل.

تمرين 3

انتبه ← تعليق

لنعمـــل :

$A = ab + 5b$

$A = b(a+5)$

تقنية التعميل تعتمد على البحث عن العدد الذي يتكرر في الجذاء ab و $5b$ و الذي نسميه عادة : العامل المشترك

$B = 12x + 18$

$B = 6(2x+3)$

يمكن اختيار 2 أيضا كعامل مشترك

$C = 5x - x^2$

$C = x(5-x)$

$D = x + 5x^2 + 11x^3$

$D = x(1 + 5x + 11x^2)$

معامل x بعد التعميل هو 1

$= (x-3)(x+7) - (5-x)(x-3)$

$= (x-3)[(x+7)-(5-x)]$

$= (x-3)(x+7-5+x)$

$= (x-3)(2x+2)$

لا تنس قاعدة حذف الأقواس المسبوقة برمز ناقص "-"

$F = 5(x+1) + (x+1)^2$

$F = (x+1)[5 + (x+1)]$

$F = (x+1)(5+x+1)$

$F = (x+1)(x+6)$

تذكر أن :

$(x+1)^2 = (x+1)\times(x+1)$

رغم أن التعبير $(x+1)^2$ يمثل المتطابقة الهامة الأولى إلا أننا لا نطبقها في هذه الحالة و ذلك لأننا بصدد التعميل و ليس النشر

$G = x^2 + 4x + 4$

$G = x^2 + 2\times x\times 2 + 2^2$

$G = (x+2)^2$

رغم أننا لم نجد عاملا مشتركا لكل الحدود لكن هذا لا يعني أننا لا نستطيع التعميل، بل يجب اتباع تقنية أخرى، في حالتنا هذه تعرفنا على أن التعبير يمثل متطابقة هامة، بقي أن نوضح حدودها و ذلك من خلال كتابة العدد 4 عل شكل مربع و كتابة العدد $4x$ على شكل جذاء بحيث يتطابق مع تعبير المتطابقة الأولى.

$H = x^2 - \frac{9}{64}$

$H = x^2 - \left(\frac{3}{8}\right)^2$

$H = \left(x - \frac{3}{8}\right)\left(x + \frac{3}{8}\right)$

نعمل مباشرة باستعمال المتطابقة الثالثة

إن إيجاد العددين 3 و 8 لا يتم بقسمة 9 و 64 على 2، بل من خلال حساب مربعات الأعداد الصحيحة الطبيعية حتى تحصل على العدد المطلوب :

$4^2 = 16$

$5^2 = 25$ $\quad 1^2 = 1$

$6^2 = 36$ $\quad 2^2 = 4$

$7^2 = 49$ $\quad 3^2 = 9$

$8^2 = 64$

$I = (2x-3)^2 - (x+1)^2$

$I = [(2x-3)+(x+1)]\times[(2x-3)-(x+1)]$

$I = [2x-3+x+1]\times[2x-3-x-1]$

$I = (2x+x-3+1)(2x-x-3-1)$

$I = (3x-2)(x-4)$

رغم أن التعبير $(x+1)^2$ يمثل المتطابقة الهامة الأولى إلا أننا لا نطبقها في هذه الحالة و ذلك لأننا بصدد التعميل و ليس النشر.
لكن باعتبار $2x-3$ يمثل عددا واحدا و أيضا $x+1$ فإنك سترى أن العدد I يمثل المتطابقة الثالثة و التي تطبيقها يمكن من تعميله.
أثناء حذف الأقواس طبق قواعد إزالة الأقواس المسبوقة بـ + أو - .

$L = (x+1)^2 - x^4$

$L = (x+1)^2 - (x^2)^2$

$L = [(x+1)+x^2]\times[(x+1)-x^2]$

$L = (x+1+x^2)(x+1-x^2)$

لاحظ أن x^4 يمكن كتابته على شكل مربع.

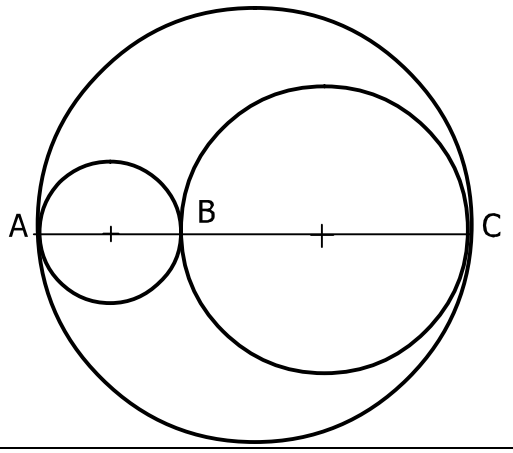
$K = 100x^2 - 121$

$K = (10x)^2 - 11^2$

$K = (10x-11)(10x+11)$

تمرين 4

من غرائب الرياضيات



ليكن $[AB]$ قطرا للعين الصغرى

و $[BC]$ قطرا للعين الكبرى

و $[AC]$ قطرا للرأس.

محيط العين الصغرى هو : $p_1 = \pi AB$

محيط العين الكبرى هو : $p_2 = \pi BC$

محيط للرأس هو : $p_3 = \pi BC$

إذن :

$p_1 + p_2 = \pi AB + \pi BC$

$= \pi(AB + BC)$

$= \pi AC$

$p_1 + p_2 = p_3$

و هذا يعني أن مجموع محيطي العينين يساوي محيط الرأس رغم أن مجموع مساحتيهما أصغر من مساحة الرأس.

السنة الثانية ثانوي إعدادي	المعادلات	تمارين مقترحة

تمرين 1 : حل المعادلات التالية :

$3x+7=19$ ، $5x+1=3x+15$ ، $x-2=-2x+15$ ، $-5x+7=-x-20$

تمرين 2 : حل المعادلات التالية :

$3(x-1)=12$ ، $5(x-3)=2(x+1)$ ، $10-(x-2)=7+(-5x+4)$ ، $-3(2x-1)+7(1-5x)=0$

تمرين 3 : حل المعادلات التالية :

$\frac{x}{2}+\frac{1}{3}=5$ ، $x+\frac{x}{2}=\frac{x-1}{4}$ ، $\frac{2x}{3}+\frac{x+1}{12}=\frac{-5}{4}$ ، $\frac{1}{14}-\frac{2x-1}{7}=\frac{x}{2}$

تمرين 4 :

علبة تحتوي على كمية غير معروفة من قطع السكر.

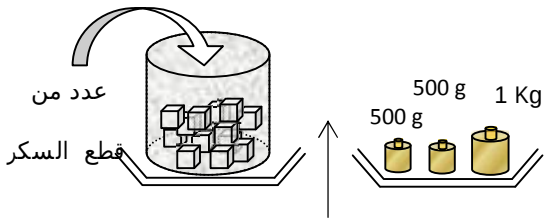
لتحديد عدد قطع السكر قام بقال بما يلي :

وزن علبة السكر و هي فارغة فوجد 380 g

ثم وزن قطعة سكر واحدة فوجد كتلتها 45 g .

علما أن قطع السكر لها نفس الكتلة.

- ما هو عدد قطع السكر الموجودة داخل العلبة ؟

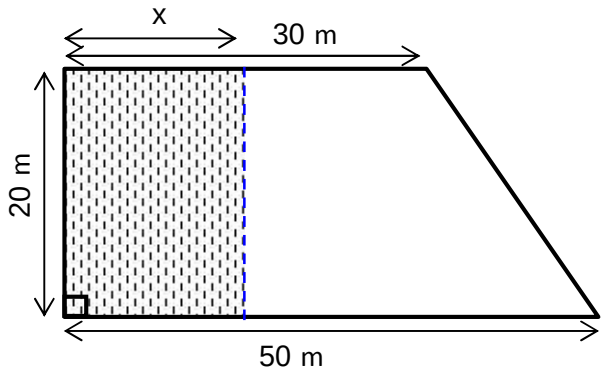


تمرين 5 :

الشكل جانبه يمثل حقلا على شكل شبه منحرف .

يريد صاحب الحقل تقسيمه إلى حقلين لهما نفس المساحة و ذلك عن طريق وضع سياج مواز للارتفاع (الخط المتقطع الأزرق).

- حدد موضع السياج (أي حدد قيمة العدد x)



تمرين 6 :

اشترى تاجر قطعة ثوب بسعر 17 DH للمتر و باعه بثمن 21 DH للمتر، فربح 1260 DH.

- كم كان طول هذه القطعة من الثوب ؟

تمرين 7 :

يبلغ عمر أب ضعف عمر ابنه، وقبل 20 سنة كان عمر الأب يبلغ 6 مرات عمر ابنه

- حدد عمر الأب و عمر الابن.

تمرين 8 : مزيدا من التفكير

لدى كريم مبلغ من المال قدره 100 درهم عبارة عن قطع نقدية من فئة 5 دراهم و 10 دراهم فقط

أحصى كريم عدد القطع النقدية فوجد 14 قطعة نقدية.

- حدد عدد القطع النقدية من كل فئة

رياضيات النجاح - www.naja7math.com

السنة الثانية ثانوي إعدادي	المعادلات حلول مقترحة	تمارين مقترحة

تمرين 1 :

لدينا :

$$3x+7=19$$
$$3x=19-7$$
$$3x=12$$
$$x=\frac{12}{3}$$
$$x=4$$

إذن حل هذه المعادلة هو :

4

لدينا :

$$5x+1=3x+15$$
$$5x-3x=15-1$$
$$2x=14$$
$$x=\frac{14}{2}$$
$$x=7$$

إذن حل هذه المعادلة هو :

7

لدينا :

$$x-2=-2x+15$$
$$x+2x=15+2$$
$$3x=17$$
$$x=\frac{17}{3}$$

إذن حل هذه المعادلة هو :

$$\frac{17}{3}$$

لدينا :

$$-5x+7=-x-20$$
$$-5x+x=-20-7$$
$$-4x=-27$$
$$x=\frac{-27}{-4}$$
$$x=\frac{27}{4}$$

إذن حل هذه المعادلة هو:

$$\frac{27}{4}$$

تمرين 2 : حل المعادلات التالية :

لدينا :

$$3(x-1)=12$$
$$3x-3=12$$
$$3x=12+3$$
$$3x=15$$
$$x=\frac{15}{3}$$
$$x=5$$

إذن حل هذه المعادلة هو : 5

لدينا :

$$5(x-3)=2(x+1)$$
$$5x-15=2x+2$$
$$5x-2x=2+15$$
$$3x=17$$
$$x=\frac{17}{3}$$

إذن حل هذه المعادلة هو : $\frac{17}{3}$

لدينا :

$$10-(x-2)=7+(-5x+4)$$
$$10-x+2=7-5x+4$$
$$-x+12=-5x+11$$
$$-x+5x=11-12$$
$$4x=-1$$
$$x=\frac{-1}{4}$$

إذن حل هذه المعادلة هو : $\frac{-1}{4}$

لدينا :

$$-3(2x-1)+7(1-5x)=0$$
$$-6x+3+7-35x=0$$
$$-41x+10=0$$
$$-41x=-10$$
$$x=\frac{-10}{-41}$$
$$x=\frac{10}{41}$$

إذن حل هذه المعادلة هو : $\frac{10}{41}$

خلال حل هذه المعادلات يجب أولا حذف الأقواس إما من خلال النشر أو استعمال قاعدة حذف الأقواس المسبوقة بزائد أو ناقص

تمرين 3 : حل المعادلات التالية :

لدينا :

لدينا :

$$\frac{x}{2}+\frac{1}{3}=5$$
$$\frac{3x}{6}+\frac{2}{6}=\frac{30}{6}$$
$$3x+2=30$$
$$3x=30-2$$
$$3x=28$$
$$x=\frac{28}{3}$$

إذن حل هذه المعادلة هو : $\frac{28}{3}$

$$x+\frac{x}{2}=\frac{x-1}{4}$$
$$\frac{4x}{4}+\frac{2x}{4}=\frac{x-1}{4}$$
$$4x+2x=x-1$$
$$6x-x=-1$$
$$5x=-1$$
$$x=\frac{-1}{5}$$

إذن حل هذه المعادلة هو : $\frac{-1}{5}$

لدينا :

$$\frac{2x}{3}+\frac{x+1}{12}=\frac{-5}{4}$$
$$\frac{8x}{12}+\frac{x+1}{12}=\frac{-15}{12}$$
$$8x+x+1=-15$$
$$9x=-15-1$$
$$9x=-16$$
$$x=\frac{-16}{9}$$

إذن حل هذه المعادلة هو : $\frac{-16}{9}$

لدينا :

$$\frac{1}{14}-\frac{2x-1}{7}=\frac{x}{2}$$
$$\frac{1}{14}-\frac{2(2x-1)}{7}=\frac{7x}{14}$$
$$1-4x+2=7x$$
$$-4x-7x=-1-2$$
$$-11x=-3$$
$$x=\frac{-3}{-11}=\frac{3}{11}$$

إذن حل هذه المعادلة هو : $\frac{3}{11}$

$\frac{x}{2}+\frac{1}{3}=5$ ، $x+\frac{x}{2}=\frac{x-1}{4}$ ، $\frac{2x}{3}+\frac{x+1}{12}=\frac{-5}{4}$ ، $\frac{1}{14}-\frac{2x-1}{7}=\frac{x}{2}$

تمرين 4 :

ليكن x عدد قطع السكر الموجودة داخل العلبة.

بما أن كتلة كل قطعة سكر هي $45\ (g)$ فإن كتلة قطع السكر كلها هي : $45x\ (g)$

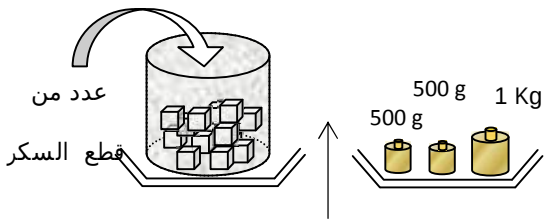
منه ، فإن كتلة العلبة و هي تحتوي على قطع السكر هو : $45x+380\ (g)$

و لدينا حسب الشكل كتلة العلبة و هي تحتوي على قطع السكر هي : $500+500+1000=2000\ (g)$

نحصل إذن على المعادلة : $45x+380=2000$

$$45x+380=2000$$
$$45x=2000-380$$
$$45x=1620$$
$$x=\frac{1620}{45}$$
$$x=36$$

لنحل هذه المعادلة :



التحقق من المسألة:

عدد قطع السكر هو 36 ، كتلتها جميعا هي :

$36\times45=1620$ ، كتلتها مع العلبة هي :

$1620+380=2000$

التحقق من المسألة أمر ضروري لأن النتيجة قد لا تناسب المبحوث عنه ، فمثلا لو وجدنا في هذا التمرين أن : $x=36,7$ أو $x=-36$ ، لما كان للمسألة حل لأن عدد قطع السكر عدد صحيح طبيعي.

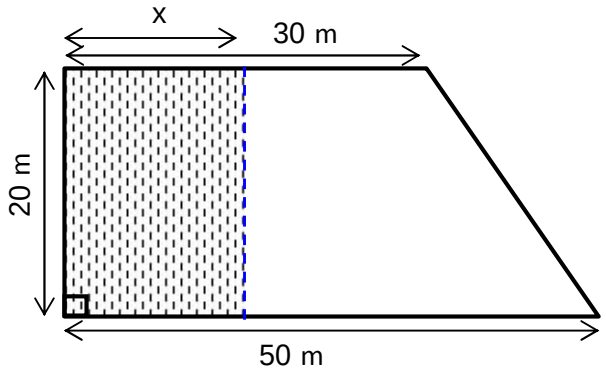
تمرين 5 :

لكي يكون الحقل مقسما إلى حقلين لهما نفس المساحة، يجب أن تكون مساحة الجزء المخدش نصف مساحة شبه المنحرف.

و لدينا : مساحة الجزء المخدش هي : $S_1 = 20x$

و مساحة شبه المنحرف هي :

$$S_2 = \frac{30+50}{2} \times 20 = 40 \times 20 = 800$$



إذن نحصل على المعادلة : $20x = \frac{800}{2}$ منه : $20x = 400$ منه : $x = \frac{400}{20}$ بالتالي : $x = 20$

التحقق من المسألة :

مساحة الجزء المخدش هي $S_1 = 20 \times 20 = 400$ و التي تمثل نصف مساحة شبه المنحرف

تمرين 6 :

ليكن x طول قطعة من الثوب.

بما أن ثـمن الشراء للمتر الواحد هو 17 DH فإن ثـمن شراء قطعة الثوب هو : $17x$ درهم

بما أن ثـمن البيع للمتر الواحد هو 21 DH فإن ثـمن بيع قطعة الثوب هو : $21x$ درهم

بالتالي يكون مقدار الربح هو : $21x - 17x$

فنحصل على المعادلة : $21x - 17x = 1260$

$4x = 1260$

لنحل هذه المعادلة: $x = \frac{1260}{4} = 315$

التحقق من المسألة :

ثـمن شراء قطعة الثوب هو : $17 \times 315 = 5355$ درهم

ثـمن بيع قطعة الثوب هو : $21 \times 315 = 6615$ درهم

بالتالي مقدار الربح هو : $6615 - 5355 = 1260$ درهم.

تمرين 7 :

ليكن x عمر الابن في الوقت الحاضر

بما أن عمر الأب ضعف عمر ابنه فإن عمره في الوقت الحاضر هو $2x$

قبل 20 سنة كان عمر الابن هو : $x - 20$ و كان عمر الأب هو : $2x - 20$

إذن و بما أنه قبل 20 سنة كان عمر الأب يبلغ 6 مرات عمر ابنه فإننا نحصل على المعادلة :

$$6(x-20) = 2x - 20$$
$$6x - 120 = 2x - 20$$
$$6x - 2x = -20 + 120$$
$$4x = 100$$

، إذن عمر الابن هو 25 سنة و عمر الأب هو 50 سنة

$$x = \frac{100}{4}$$
$$x = 25$$

و قبل 20 سنة كان عمر الابن هو 5 سنوات و عمر الأب هو 30 سنة و التي تمثل 6 مرات عمر الابن

تمرين 8 : مزيدا من التفكير

ليكن x عدد القطع النقدية من فئة 5 دراهم ، إذن $14 - x$ هو عدد القطع النقدية من فئة 10 دراهم

و هكذا يكون مبلغ النقود من فئة 5 دراهم هو : $5x$ و من فئة 10 دراهم هو : $10(14-x)$

و بذلك نحصل على المعادلة : $5x + 10(14-x) = 100$

$$5x+140-10x=100$$
$$-5x=100-140$$
منه : $-5x=-40$ ، إذن عدد القطع النقدية من فئة 5 دراهم هو 8، إذن عدد القطع
$$x=\frac{-40}{-5}$$
$$x=8$$
النقدية من فئة 10 دراهم هو $14-8=6$ ، و يكون المبلغ : $8\times5+6\times10=40+60=100$ DH

الترتيب و العمليات

تمرين 1

قارن a و b في الحالات التالية :

$a=\frac{-5}{4}$ و $b=\frac{-7}{6}$	$a=3\pi-4$ و $b=2\pi-3$	$a=y(x-y)$ و $b=x(x-y)$

تمرين 2

حل المتراجحات التالية :

$2x-5<7$	$2x-5\geq -35-x$	$3(x-5)>-(x-1)+7$
$8(x+5)\leq 4(x+10)$	$3x-1\leq 4x+14$	$\frac{x}{2}\leq 3-x$

تمرين 3

علما أن : $-2\leq x\leq 3$ ، اعط تأطيرا للأعداد :

$x+7$	$6x$	$2x+5$	$8x-10$
$\frac{x}{10}$	$\frac{x+8}{6}$	$2(x+4)$	$\frac{x}{3}+2(x-1)$

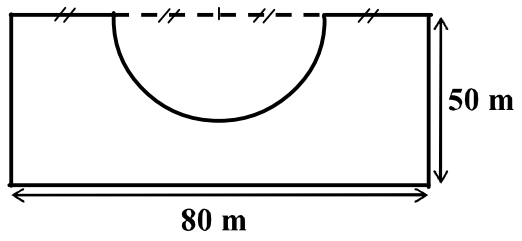
تمرين 4

تمرين 21 ص 125 من الكتاب المدرسي : واحة الرياضيات

الشكل التالي يمثل حديقة.

علما أن : $3{,}14<\pi<3{,}15$

اعط تأطيرا لمحيط الحديقة.



الترتيب و العمليات - حلول

تمرين 1

انتبه ← تعليق ←

لنقارن a و b في الحالات التالية :

لدينا : $a-b=\frac{-5}{4}-\frac{-7}{6}$ $=\frac{-5}{4}+\frac{7}{6}$ $=\frac{-15}{12}+\frac{14}{12}$ $a-b=\frac{-1}{12}<0$ إذن $a<b$	لدينا : $a-b=(3\pi-4)-(2\pi-3)$ $=3\pi-4-2\pi+3$ $a-b=\pi-1>0$ إذن $a>b$	لدينا : $a-b=x(x-y)-y(x-y)$ $=x^2-xy-yx+y^2$ $=x^2-2xy+y^2$ $a-b=(x-y)^2\geq 0$ إذن $a\geq b$
← يمكن أيضا استعمال الرمز $\leq$	← العدد $\pi\approx 3{,}14$	← المربع يكون دائما موجبا

تمرين 2

انتبه ← تعليق ←

لنحل المتراجحات التالية :

لدينا : $2x-5<7$ $2x<7+5$ $2x<12$ $x<\frac{12}{2}$ $x<6$ إذن حلول هذه المتراجحة هي جميع الأعداد الجذرية الأصغر قطعا من : 6	لدينا : $2x-5\geq -35-x$ $2x+x\geq -35+5$ $3x\geq -30$ $x\geq \frac{-30}{3}$ $x\geq -10$ إذن حلول هذه المتراجحة هي جميع الأعداد الجذرية الأكبر من أو تساوي: -10	لدينا : $3(x-5)>-(x-1)+7$ $3x-15>-x+1+7$ $3x-15>-x+8$ $3x+x>8+15$ $4x>23$ $x>\frac{23}{4}$ إذن حلول هذه المتراجحة هي جميع الأعداد الجذرية الأكبر قطعا من : $\frac{23}{4}$ ← انتبه أثناء حذف الأقواس المسبوقة برمز ناقص
لدينا : $8(x+5)\leq 4(x+10)$ $8x+40\leq 4x+40$ $8x-4x\leq 40-40$ $4x\leq 0$ $x\leq \frac{0}{4}$ $x\leq 0$ إذن حلول هذه المتراجحة هي جميع الأعداد الجذرية الأصغر من أو تساوي: 0 يمكن أيضا القول: إذن حلول هذه المتراجحة هي جميع الأعداد الجذرية السالبة.	لدينا : $3x-1\leq 4x+14$ $3x-4x\leq 14+1$ $-x\leq 15$ $-15\leq x$ إذن حلول هذه المتراجحة هي جميع الأعداد الجذرية الأكبر من أو تساوي: -15 ← انتبه: القسمة على عدد سالب تغير منحى المتراجحة، لذلك بادلنا طرفي المتراجحة مع تطبيق القواعد(تغيير الإشارة)	لدينا : $\frac{x}{2}\leq 3-x$ $\frac{x}{2}\leq \frac{6}{2}-\frac{2x}{2}$ $x\leq 6-2x$ $x+2x\leq 6$ $3x\leq 6$ $x\leq \frac{6}{3}$ $x\leq 2$ إذن حلول هذه المتراجحة هي جميع الأعداد الجذرية الأصغر من أو تساوي: 2

تمرين 3

انتبه ← تعليق ←

علما أن : $-2 \le x \le 3$ ، لنأطر الأعداد :

$x+7$	$6x$	$2x+5$	$8x-10$
لدينا : $-2 \le x \le 3$ منه : $-2+7 \le x+7 \le 3+7$ بالتالي : $5 \le x+7 \le 10$	لدينا : $-2 \le x \le 3$ منه : $6\times(-2) \le 6x \le 6\times 3$ بالتالي : $-12 \le 6x \le 18$	لدينا : $-2 \le x \le 3$ منه : $-4 \le 2x \le 6$ بالتالي : $1 \le 2x+5 \le 11$	لدينا : $-2 \le x \le 3$ منه : $-16 \le 8x \le 24$ بالتالي : $-26 \le 8x-10 \le 14$
$\frac{x}{10}$	$\frac{x+8}{6}$	$2(x+4)$	$\frac{x}{3}+2(x-1)$
لدينا : $-2 \le x \le 3$ منه : $\frac{-2}{10} \le \frac{x}{10} \le \frac{3}{10}$ بالتالي : $\frac{-1}{5} \le \frac{x}{10} \le \frac{3}{10}$	لدينا : $-2 \le x \le 3$ منه : $6 \le x+8 \le 11$ بالتالي : $1 \le \frac{x+8}{6} \le \frac{11}{6}$	لدينا : $-2 \le x \le 3$ منه : $2 \le x+4 \le 7$ بالتالي : $4 \le 2(x+4) \le 14$	نبسط أولا: $\frac{x}{3}+2(x-1)=\frac{x}{2}+2x-2$ $=\frac{x+4x-4}{2}$ $=\frac{5x-4}{2}$ لدينا : $-2 \le x \le 3$ منه : $-10 \le 5x \le 15$ منه : $-14 \le 5x-4 \le 11$ بالتالي : $-7 \le \frac{5x-4}{2} \le \frac{11}{2}$

تمرين 4

تمرين 21 ص 125 من الكتاب المدرسي : واحة الرياضيات

معطيات : $3,14 < \pi < 3,15$ ، لنؤطر محيط الحديقة.

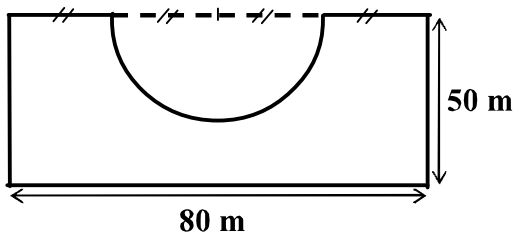
محيط الحديقة يتكون من نصف دائرة شعاعها $R=\frac{80}{4}=20$ و من أطوال أطوالها معلومة، أي :

$$p=\frac{2\times\pi\times 20}{2}+50+80+50+20+20$$
$$p=20\pi+220$$

لدينا : $3,14 < \pi < 3,15$

منه : $62,8 < 20\pi < 63$ منه $282,8 < 20\pi+220 < 283$

أي أن محيط الحديقة محصور بين $282,8\,m$ و $283\,m$



لاحظ أن نسبة الخطأ $283-282,8=0,2\,m=20\,cm$ قد تبدو صغيرة ، لكن في حالة حساب محيطات أكبر (كحساب محيط الكرة الأرضية) فإن هذا التأطير لا يكون دقيقا لذلك يجب استعمال قيم مقربة أدق للعدد π

المثلث القائم الزاوية و الدائرة

تمرين 1

تمرين 2 ص 158 من الكتاب المدرسي : واحة الرياضيات

$[AH]$ و $[BK]$ هما ارتفاعان في مثلث ABC

بين أن النقط A و B و H و K تنتمي لنفس الدائرة محددا مركزها.

تمرين 2

ABC مثلث قائم الزاوية في النقطة A حيث $\hat{B} = 20°$ ، I منتصف $[BC]$

1- احسب : $A\hat{I}B$

2- احسب : $I\hat{A}H$ حيث H تمثل المسقط العمودي للنقطة A على (BC)

تمرين 3

$[x\hat{O}y]$ زاوية و M نقطة داخلها.

E و F هما على التوالي المسقطان العموديان للنقطة M على ضلعي الزاوية $[x\hat{O}y]$ ، I منتصف $[OM]$

◈ بين أن المثلث EIF متساوي الساقين في النقطة I

تمرين 4

ABC مثلث قائم الزاوية في النقطة A حيث $AB = 6\,cm$ و $AC = 8\,cm$ ، و H المسقط العمودي للنقطة A على (BC)

1- أنشئ الشكل (بالقياسات الحقيقية)

2- احسب BC

3- عبر عن مساحة المثلث ABC بطريقتين ثم استنتج حساب المسافة AH

4- احسب المسافات : BH و CH

تمرين 5

(C) دائرة قطرها $EF = 29\,cm$ ، M نقطة من الدائرة (C) حيث $EM = 21\,cm$

◈ احسب المسافة : FM

تمرين 6

ABC مثلث قائم الزاوية في النقطة A حيث $AB = 6\,cm$ و $AC = 8\,cm$ ، I منتصف $[AB]$ و H المسقط العمودي للنقطة I على (BC)

1- احسب : $\cos(\hat{B})$

2- عبر عن $\cos(\hat{B})$ بدلالة BH

3- استنتج حساب BH

4- احسب CH و IH

المثلث القائم الزاوية و الدائرة - حلول

تمرين 1

انتبه ← تعليق ←

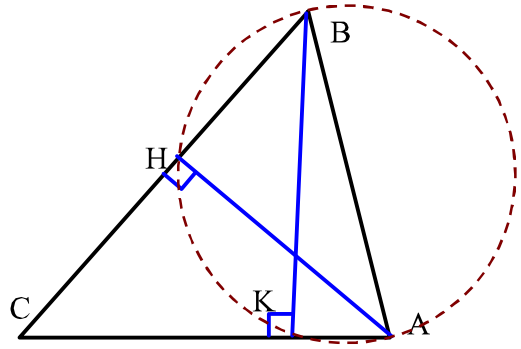
لنبين أن النقط A و B و H و K تنتمي لنفس الدائرة محددا مركزها.

لدينا ABH مثلث قائم الزاوية في النقطة H ، إذن فهو محاط بدائرة قطرها $[AB]$

لدينا ABK مثلث قائم الزاوية في النقطة K ، إذن فهو محاط بدائرة قطرها $[AB]$

بالتالي H و K نقطتان تنتميان للدائرة ذات القطر $[AB]$

و هذا يعني أن النقط A و B و H و K تنتمي لنفس الدائرة التي مركزها منتصف القطعة $[AB]$



تمرين 2

انتبه ← تعليق ←

معطيات : ABC مثلث قائم الزاوية في النقطة A حيث $\hat{B}=20°$ ، I منتصف $[BC]$

لنحسب : $A\hat{I}B$

لدينا ABC مثلث قائم الزاوية في النقطة A ، إذن فهو محاط بدائرة قطرها BC و مركزها I ، منه $IA=IB=IC$

إذن : AIB مثلث متساوي الساقين في النقطة I

منه : $I\hat{A}B=\hat{B}=20°$

و بالتالي : $A\hat{I}B=180-(20+20)=180-40=140°$

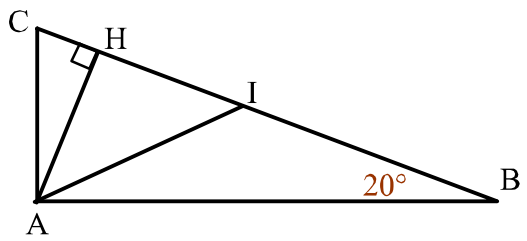
لنحسب : $I\hat{A}H$

بما أن الزاوية $H\hat{I}B$ مستقيمة فإن:

$H\hat{I}A=H\hat{I}B-A\hat{I}B=180-140=40°$

بما أن المثلث AHI قائم الزاوية في النقطة H ، فإن :

$I\hat{A}H=180-(40+90)=180-130=50°$



تمرين 3

انتبه ← تعليق ←

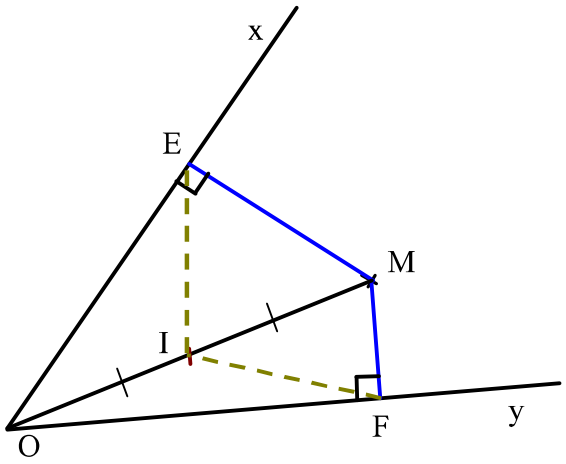
لنبين أن المثلث EIF متساوي الساقين في النقطة I

لدينا OEM مثلث قائم الزاوية في النقطة E ، إذن فهو محاط بدائرة قطرها OM و مركزها I ، منه $IO=IE=IM$

لدينا OFM مثلث قائم الزاوية في النقطة F ، إذن فهو محاط بدائرة قطرها OM و مركزها I ، منه $IO=IF=IM$

إذن : $IE=IF$

بالتالي : EIF متساوي الساقين في النقطة I

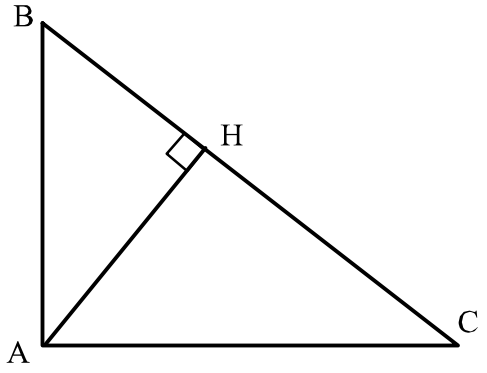


تمرين 4

انتبه ← تعليق ←

ABC مثلث قائم الزاوية في النقطة A حيث $AB = 6\,cm$ و $AC = 8\,cm$ ، و H المسقط العمودي للنقطة A على (BC)

-1



-2 لنحسب BC

لدينا ABC مثلث قائم الزاوية في A ، إذن حسب مبرهنة فيتاغورس

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

المباشرة فإن :

$$BC^2 = 6^2 + 8^2$$
$$BC^2 = 36 + 64$$
$$BC^2 = 100$$

منه : $BC = 10$

-3 لنحسب AH

لدينا مساحة المثلث ABC هي :

$$S_{ABC} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{6 \times 8}{2} = \frac{48}{2} = 24$$

و أيضا :

$$S_{ABC} = \frac{BC \times AH}{2} = \frac{10 \times AH}{2} = 5\,AH$$

نستنتج إذن أن : $5\,AH = 24$ منه : $AH = \frac{24}{5} = 4{,}8\,cm$

-4 لنحسب BH

لدينا ABH مثلث قائم الزاوية في H ، إذن حسب مبرهنة فيتاغورس

$$AB^2 = AH^2 + BH^2$$
$$6^2 = 4{,}8^2 + BH^2$$

المباشرة فإن :

$$36 = 23{,}04 + BH^2$$
$$36 - 23{,}04 = BH^2$$
$$12{,}96 = BH^2$$

بالتالي : $BH = 3{,}6\,cm$

-4 لنحسب CH

$$CH = BC - BH$$

لدينا :

$$CH = 10 - 3{,}6$$
$$CH = 6{,}4\,cm$$

يمكن حساب CH بنفس الطريقة السابقة

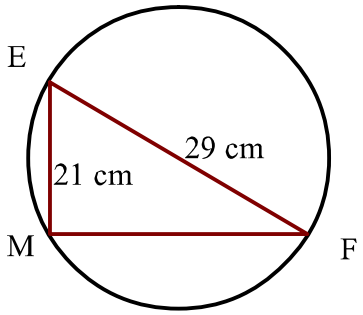
رغم أن المسافة المطلوبة هي BH ، إلا أن وتر المثلث ABH هو AB ، لذلك لم يتم حسابه بنفس طريقة حساب BC ، إذ يجب كتابة مبرهنة فيتاغورس بغض النظر عن المسافة المطلوبة.

القيمة 3,6 تم إيجادها باستعمال آلة حاسبة : نكتب 12,96 ثم نضغط على الرمز $\sqrt{\ }$ فنحصل على 3,6

تمرين 5

انتبه ← تعليق ←

(C) دائرة قطرها $EF = 29\,cm$ ، M نقطة من الدائرة (C) حيث $EM = 21\,cm$



لنحسب المسافة : FM

بما أن المثلث EFM محاط بدائرة قطرها هو أحد أضلاعه ، فهو لإذن مثلث قائم الزاوية في M

$$EF^2 = EM^2 + FM^2$$

إذن حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة فإن :

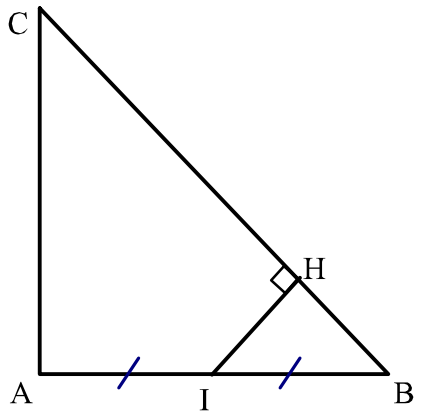
$$29^2 = 21^2 + FM^2$$
$$841 = 441 + FM^2$$
$$841 - 441 = FM^2$$
$$400 = FM^2$$

بالتالي : $FM = 20\,cm$

تمرين 6

انتبه ← تعليق ←

ABC مثلث قائم الزاوية في النقطة A حيث $AB = 6\,cm$ و $AC = 8\,cm$ ، I منتصف $[AB]$ و H المسقط العمودي للنقطة I على (BC)



لنحسب : $\cos(\hat{B})$

لنحسب أولا BC

لدينا ABC مثلث قائم الزاوية في A ، إذن حسب مبرهنة فيتاغورس

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

المباشرة فإن :

$$BC^2 = 6^2 + 8^2$$

$$BC^2 = 36 + 64$$

$$BC^2 = 100$$

منه : $BC = 10\ cm$

إذن : $\cos(\hat{B}) = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

لنعبر عن $\cos(\hat{B})$ بدلالة BH

بما أن المثلث IHB قائم الزاوية في النقطة H و تره IB فإن :

$$\cos(\hat{B}) = \frac{BH}{IB} = \frac{BH}{3}$$

لنحسب : BH

بما أن : $\cos(\hat{B}) = \frac{3}{5}$ و $\cos(\hat{B}) = \frac{BH}{3}$

فإن : $\frac{BH}{3} = \frac{3}{5}$ منه :

$$BH = \frac{3 \times 3}{5} = \frac{9}{5} = 1{,}8\ cm$$

لنحسب : IH

لدينا IHB مثلث قائم الزاوية في H ، إذن حسب مبرهنة فيتاغورس

$$IB^2 = BH^2 + IH^2$$

المباشرة فإن :

$$3^2 = 1{,}8^2 + IH^2$$

$$9 = 3{,}24 + IH^2$$

$$9 - 3{,}24 = IH^2$$

$$5{,}76 = IH^2$$

منه : $IH = 2{,}4\ cm$

لنحسب : CH

لدينا : $CH = BC - BH = 10 - 1{,}8 = 8{,}2\,cm$

مبرهنة فيتاغورس

تمرين 1

$ABCD$ مستطيل حيث : $AB = 6cm$ و $AD = 9cm$.

و لتكن I منتصف القطعة $[AB]$ J نقطة من القطعة : $[AD]$ حيث $AJ = 1cm$

① احسب المسافات IJ و IC و JC

② بين أن المثلث : IJC قائم الزاوية في النقطة I

③ احسب محيط و مساحة المثلث IJC

تمرين 2

ABC مثلث قائم الزاوية في A حيث : $AB = 6cm$ و $AC = 8cm$.

و لتكن H المسقط العمودي للنقطة A على (BC)

① احسب المسافة BC

② احسب المسافة AH (احسب مساحة المثلث ABC بطريقتين)

③ احسب المسافات BH و CH

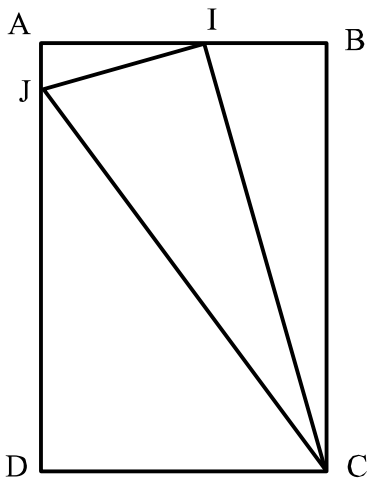
تمرين 3 من أولمبياد الرياضيات

$ABCD$ مستطيـل و M نقطة داخلـه .

◈ بين أن : $AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2$

مبرهنة فيتاغورس-حلول

تمرين 1



① لنحسب المسافات IJ و IC و JC

لدينا في المثلث القائم الزاوية AIJ حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة :

$IJ^2 = AI^2 + AJ^2 = \left(\frac{6}{2}\right)^2 + 1^2 = 3^2 + 1 = 9 + 1 = 10$ منه $IJ = \sqrt{10}\,cm$

لدينا في المثلث القائم الزاوية IBC حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة :

$IC^2 = BI^2 + BC^2 = 3^2 + 9^2 = 9 + 81 = 90$ منه $IC = \sqrt{90}\,cm$

لدينا في المثلث القائم الزاوية JDC حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة :

$JC^2 = DC^2 + DJ^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$ منه $JC = \sqrt{100} = 10\,cm$

② لنبين أن المثلث : IJC قائم الزاوية في النقطة I

لدينا : $JC^2 = 10^2 = 100$ و $IC^2 = \left(\sqrt{90}\right)^2 = 90$ و $IJ^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2 = 10$

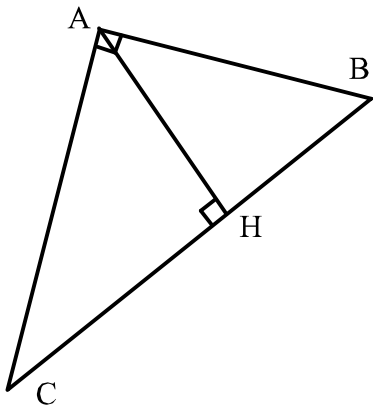
إذن : $IJ^2 + IC^2 = JC^2$ ، إذن حسب مبرهنة فيتاغورس العكسية نستنتج أن المثلث IJC قائم الزاوية في النقطة I

③ احسب محيط و مساحة المثلث IJC

محيط المثلث IJC هو : $p = IJ + JC + CI = \sqrt{10} + 10 + \sqrt{90} = \sqrt{10} + 10 + 3\sqrt{10} = 4\sqrt{10} + 10\,cm$

بما أن المثلث IJC قائم الزاوية في النقطة I فإن مساحته هي : $S = \frac{IJ \times IC}{2} = \frac{\sqrt{10} \times \sqrt{90}}{2} = \frac{\sqrt{900}}{2} = \frac{30}{2} = 15\,cm^2$

تمرين 2



① لنحسب المسافة BC

لدينا في المثلث القائم الزاوية ABC حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$ منه $BC = \sqrt{100} = 10\,cm$

② احسب المسافة AH

بما أن المثلث ABC قائم الزاوية في النقطة A فإن مساحته هي : $S = \frac{AB \times AC}{2}$

و أيضا بما أن $[AH]$ ارتفاع للمثلث ABC فإن مساحته أيضا هي : $S = \frac{AH \times BC}{2}$

نستنتج إذن أن : $\frac{AH \times BC}{2} = \frac{AB \times AC}{2}$ منه $AH \times BC = AB \times AC$

نعوض نجد : $AH \times 10 = 6 \times 8$ أي $10\ AH = 48$ ، بالتالي : $AH = \frac{48}{10} = 4{,}8\,cm$

③ لنحسب BH و CH

* لدينا في المثلث القائم الزاوية ABH حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة :

$AB^2 = AH^2 + BH^2$ منه $6^2 = 4{,}8^2 + BH^2$ منه $36 = 23{,}04 + BH^2$

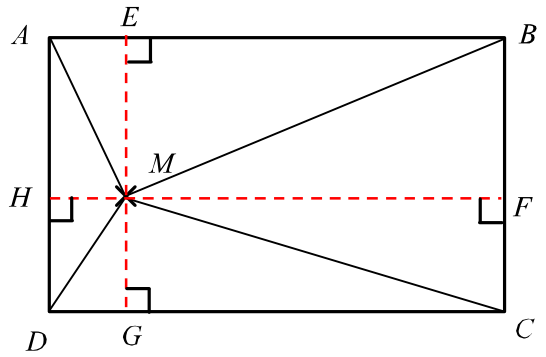
منه : $BH^2 = 36 - 23{,}04$ ، $BH^2 = 12{,}96$ منه $BH = \sqrt{12{,}96}$ (باستعمال آلة حاسبة نجد $BH = 3{,}6\,cm$)

* لدينا : $CH = BC - BH = 10 - 3{,}6 = 6{,}4\,cm$

☠ ← رغم أننا نبحث عن المسافة BH إلا أن المتساوية $BH^2 = AH^2 + AB^2$ **خاطئة** لأن الوتر هو AB و ليس BH

تمرين 3 :

لتكن E و F و G و H هي على التوالي المساقط العمودية للنقطة M على (AB) و (BC) و (CD) و (AD) على التوالي .



لدينا حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة :

$$AM^2 = EM^2 + AE^2 \quad \text{و} \quad CM^2 = FM^2 + CF^2$$

$$AM^2 = EM^2 + MH^2 \quad \text{و} \quad CM^2 = FM^2 + MG^2$$

و

$$BM^2 = EM^2 + BE^2 \quad \text{و} \quad DM^2 = MG^2 + DG^2$$

$$BM^2 = EM^2 + FM^2 \quad \text{و} \quad DM^2 = MG^2 + MH^2$$

نستنتج إذن أن :

$$AM^2 + CM^2 = EM^2 + MH^2 + FM^2 + MG^2$$

و

$$BM^2 + DM^2 = EM^2 + FM^2 + MG^2 + MH^2$$

بالتالـــي :

$$\underline{AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2}$$

الدالة الخطيـــة

تمرين 1

لتكن f الدالة الخطية المعرفة بما يلي : $f(x)=-2x$

1- احسب : $f(2)$ و $f(-5)$ و $f(0)$ و $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ و $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ و $f\left(\frac{5}{-7}\right)$

2- مثل في م.م.م التمثيل المبياني للدالة f

3- حل في IR المعادلة : $f(x)=x+12$

4- حدد العدد a حيث : $f(a)=10$

تمرين 2

نعتبر الدالتين الخطيتين f و g المعرفتين بما يلي : $f(x)=11x$ و $g(x)=-6x$

1- نعتبر الدالة h حيث : $h(x)=f(x)+g(x)$ ، بين أن h دالة خطية

2- نعتبر الدالة p حيث : $p(x)=f(x)g(x)$

أ- بسط $p(x)$ ب - احسب : $\frac{p(1)}{1}$ و $\frac{p(2)}{2}$ ج- هل p دالة خطية ؟ علل جوابك

تمرين 3

1- حدد معامل الدالة الخطية f علما أن : $f(2)=-10$

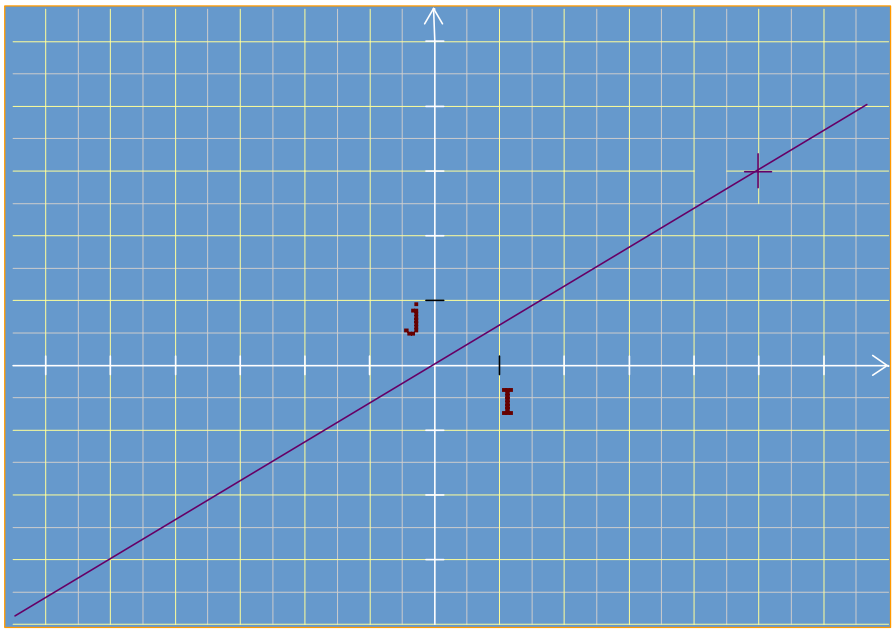
2- حدد معامل الدالة الخطية g علما أن تمثيلها المبياني يمر من النقطة $A(-3,-12)$

3- حدد معامل الدالة الخطية h علما أن : $h(1)+5h(3)=-8$

تمرين 4

لتكن f دالة خطية حيث : $f(-4)=2$ ، احسب $f(7)$

تمرين 5



1- هل الشكل جانبه يمثل التمثيل المبياني لدالة خطية ؟ علل جوابك

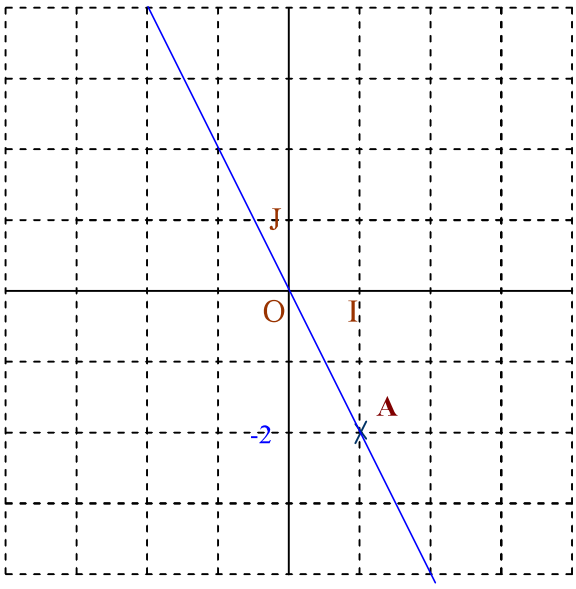
2- حدد معامل هذه الدالة

الدالة الخطية- حلول

تمرين 1

انتبه ← تعليق ←

$f(x)=-2x$

حساب الصور		التمثيل المبياني: $f(1)=-2$
$f(0)=-2\times 0=0$	$f(2)=-2\times 2=-4$	
$f(-5)=-2\times(-5)=10$	$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$	
$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-2\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{-2}{\sqrt{3}}$ $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{-2\sqrt{3}}{3}$	$f\left(\frac{5}{-7}\right)=-2\times\frac{5}{-7}=\frac{-10}{-7}$ $f\left(\frac{5}{-7}\right)=\frac{10}{7}$	

لنحل المعادلة : $f(x)=x+12$	لنحدد العدد a حيث : $f(a)=10$
المعادلة : $f(x)=x+12$ تعني $-2x=x+12$ $-2x-x=12$ $-3x=12$ منه : $x=\frac{12}{-3}$ $x=-4$	$-2a=10$ $f(a)=10$ تعني : $a=\frac{10}{-2}$ $a=-5$

← هذه النتيجة تعني أن العدد الذي صورته 10 هو -5

تمرين 2

انتبه ← تعليق ←

$f(x)=11x$ و $g(x)=-6x$ و $h(x)=f(x)+g(x)$ و $p(x)=f(x)g(x)$

لنبين أن h دالة خطية

لدينا $h(x)=f(x)+g(x)$ منه : $h(x)=11x-6x=5x$ إذن h دالة خطية.

لنبسط $p(x)$	لنحسب : $\frac{p(1)}{1}$ و $\frac{p(2)}{2}$		هل p دالة خطية ؟ علل جوابك
$p(x)=11x\times(-6x)=-66x^2$	$\frac{p(1)}{1}=\frac{-66}{1}=-66$	$\frac{p(2)}{2}=\frac{-66\times 4}{2}=-132$	بما أن : $\frac{p(1)}{1}\neq\frac{p(2)}{2}$ فإن p ليست دالة خطية.

تمرين 3

انتبه ← تعليق ←

-1	-2	-3
معامل هذه الدالة هو : $a=\frac{f(2)}{2}=\frac{-10}{2}=-5$ إذن : $f(x)=-5x$	لدينا حسب المعطيات : $g(-3)=-12$ معامل هذه الدالة هو : $a=\frac{g(-3)}{-3}=\frac{-12}{-3}=4$ إذن : $g(x)=4x$	ليكن a معامل هذه الدالة : أي $h(x)=ax$ لدينا : $h(1)+5h(3)=-8$ $a+5\times 3a=-8$ $a+15a=-8$ منه: $16a=-8$ $a=\frac{-8}{16}$ $a=\frac{-1}{2}$ منه: $h(x)=\frac{-1}{2}x$

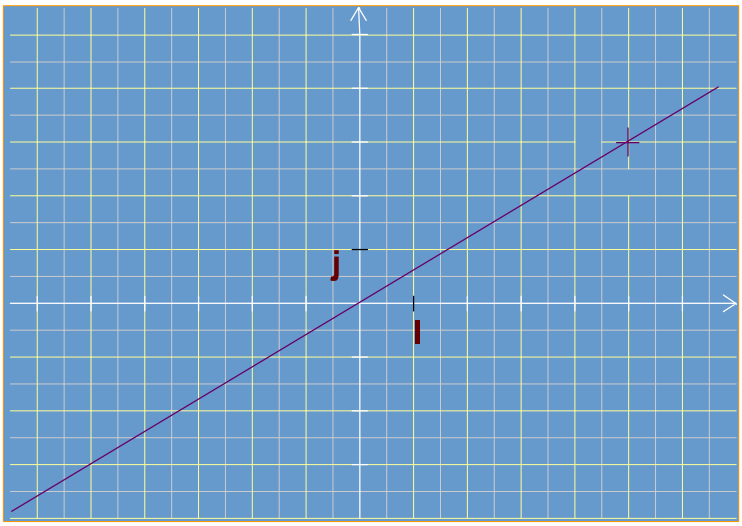
تمرين 4

انتبه ← تعليق ←

f دالة خطية حيث : $f(-4)=2$ ، لنحسب $f(7)$
معامل هذه الدالة هو : $a=\frac{f(-4)}{-4}=\frac{2}{-4}=\frac{-1}{2}$ إذن : $f(x)=\frac{-1}{2}x$ إذن : $f(7)=\frac{-7}{2}$

تمرين 5

انتبه ← تعليق ←

-1	الشكل جانبه يمثل تمثيلا مبيانيا لدالة خطية، لأنه مستقيم مار من أصل المعلم	
-2	لدينا حسب الشكل : $f(5)=3$ إذن معامل هذه الدالة هو : $a=\frac{f(5)}{5}=\frac{3}{5}$	

الازاحــة – المتجهـــات

تمرين 1

$[AB]$ قطعة . و C صورة النقطة B بالازاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AB}$

① أنشئ الشكل ② بين أن B منتصف $[AC]$

تمرين 2

$ABCD$ متوازي أضلاع. E مماثلة A بالنسبة لـ B

◈ بين أن $BECD$ متوازي أضلاع .

تمرين 3

ABC مثلث . I منتصف $[BC]$. J مماثلة A بالنسبة للنقطة I .

◈ بين أن $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BJ}$

تمرين 4

ABC مثلث .

① أنشئ النقطة M حيث $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$

② أنشئ النقطة N حيث $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{BC}$

③ بين أن A منتصف $[MN]$

تمرين 5

بسط التعبير التالي : $\vec{u}=\overrightarrow{EK}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{KM}$

تمرين 6

A و B و C و D نقط من المستوى.

◈ بين أن $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$

تمرين 7

$ABCD$ متوازي أضلاع.

I مماثلة A بالنسبة لـ B . J مماثلة B بالنسبة لـ C . K مماثلة C بالنسبة لـ D . L مماثلة D بالنسبة لـ A .

① أنشئ الشكل

② بين أن : $\overrightarrow{LI}=\overrightarrow{LA}+2\overrightarrow{AB}$

③ بين أن : $\overrightarrow{KJ}=\overrightarrow{CJ}+2\overrightarrow{DC}$

④ بين أن : $\overrightarrow{LA}=\overrightarrow{CJ}$

⑤ استنتج أن : $LIJK$ متوازي أضلاع

الازاحة -المتجهات - حلول

تمرين 1

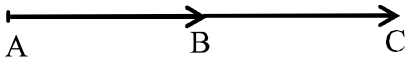
انتبه ← تعليق ←

② لنبين أن B منتصف $[AC]$

بما أن C صورة النقطة B بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AB}$ فإن : $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}$

و هذا يعني أن B منتصف $[AC]$

① الشكل



تمرين 2

انتبه ← تعليق ←

لنبين أن $BECD$ متوازي أضلاع .

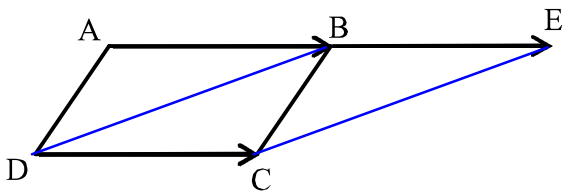
لدينا $BECD$ متوازي أضلاع ، إذن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

و لدينا : E مماثلة A بالنسبة لـ B ، إذن : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BE}$

نستنتج إذن أن : $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BE}$

و بالتالي : $BECD$ متوازي أضلاع

الشكل



تمرين 3

انتبه ← تعليق ←

لنبين أن $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BJ}$

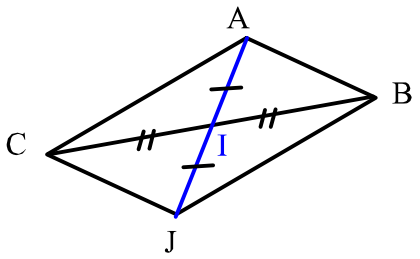
بما أن J مماثلة A بالنسبة للنقطة I فإن :

I منتصف $[AJ]$

و لدينا I منتصف $[BC]$ ، إذن للقطعتين $[AJ]$ و $[BC]$ نفس المنتصف ، إذن الرباعي $ABJC$ متوازي أضلاع

بالتالي : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BJ}$

الشكل



تمرين 4

انتبه ← تعليق ←

لنبين أن A منتصف $[MN]$

لدينا $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$ ، منه : $MABC$ متوازي أضلاع

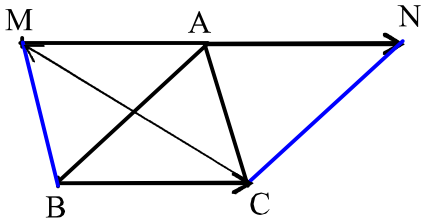
منه : $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{BC}$

و لدينا $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{BC}$

إذن : $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AN}$

بالتالي: A منتصف $[MN]$

الشكل



تمرين 5

انتبه ← تعليق ←

لنبسط التعبير التالي : $\vec{u} = \overrightarrow{EK} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{KM}$

لدينا:

$$\vec{u} = \overrightarrow{EK} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{KM}$$
$$\vec{u} = \overrightarrow{EK} + \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{MA}$$
$$\vec{u} = \overrightarrow{EM} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{MA}$$
$$\vec{u} = \overrightarrow{EM} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{MA}$$

منه :

$$\vec{u} = \overrightarrow{EM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AE}$$
$$\vec{u} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AE}$$
$$\vec{u} = \overrightarrow{EE}$$
$$\vec{u} = \vec{0}$$

لتطبيق علاقة شال يجب ترتيب الحدود ←

تمرين 6

انتبه ← تعليق ←

بين أن $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$

لدينا:

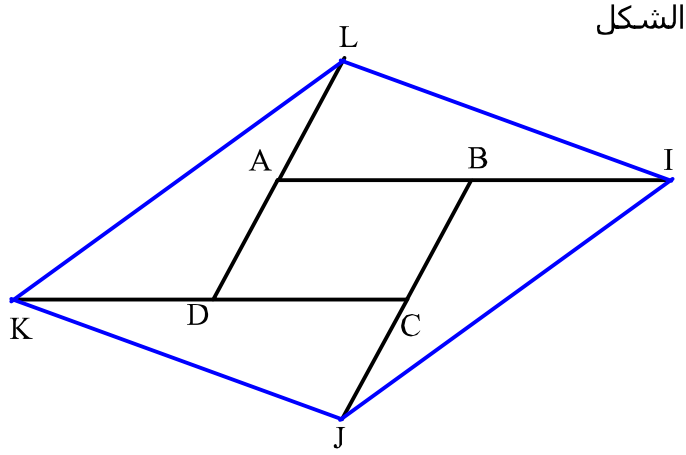
$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}$$
$$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD}$$
$$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \vec{0}$$
$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$$

علاقة شال استعملت بطريقة عكسية بمعنى أننا كتبنا المتجهة $\overrightarrow{AD}$ على شكل مجموع متجهتين و كذلك $\overrightarrow{BC}$ ←

تمرين 7

انتبه ← تعليق ←

① الشكل



② لنبين أن : $\overrightarrow{LI} = \overrightarrow{LA} + 2\overrightarrow{AB}$

لدينا : $\overrightarrow{LI} = \overrightarrow{LA} + \overrightarrow{AI}$

و بما أن B منتصف $[AI]$ فإن : $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB}$

إذن : $\overrightarrow{LI} = \overrightarrow{LA} + 2\overrightarrow{AB}$

③ لنبين أن : $\overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{CJ} + 2\overrightarrow{DC}$

لدينا : $\overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{CJ}$

و بما أن D منتصف $[KC]$ فإن : $\overrightarrow{KC} = 2\overrightarrow{DC}$

إذن : $\overrightarrow{KJ} = 2\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CJ}$ أي $\overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{CJ} + 2\overrightarrow{DC}$

④ لنبين أن : $\overrightarrow{LA} = \overrightarrow{CJ}$

بما أن A منتصف $[DL]$ فإن : $\overrightarrow{LA} = \overrightarrow{AD}$

و بما أن $ABCD$ متوازي أضلاع فإن : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

و بما أن C منتصف $[JB]$ فإن : $\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{BC}$

نستنتج إذن من المتساويات الثلاث أن : $\overrightarrow{LA} = \overrightarrow{CJ}$

⑤ لنبين أن : $LIJK$ متوازي أضلاع

لدينا حسب السؤالين ② و ③ $\overrightarrow{LI} = \overrightarrow{LA} + 2\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{CJ} + 2\overrightarrow{DC}$

و حسب السؤال ④ $\overrightarrow{LA} = \overrightarrow{CJ}$ ، و بما أن $ABCD$ متوازي أضلاع فإن : $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$

نستنتج من هذه المتساويات الأربع أن : $\overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{LI}$

و هذا يعني أن : $LIJK$ متوازي أضلاع

الإحصاء

تمرين 1

يعطينا الكشف الآتي نقط لفرض محروس في مادة الرياضيات بأحد أقسام السنة الثالثة :

14 – 16 – 14 – 6 – 7 – 12 – 14 – 13 – 15 – 9 – 8 – 10

10 – 12 – 12 – 16 – 12 – 8 – 13 – 9 – 6 – 7 – 8 – 9 – 10 – 12

14 – 14 – 13 – 6 – 15 – 13 – 12 – 9 – 8 – 7 – 6 – 12 – 7 – 10

1) – حدد الساكنة الإحصائية و الميزة المدروسة .

2) – كون جدول الحصيات و الحصيصات المتراكمة و الترددات و الترددات المتراكمة .

3) – أحسب المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة الإحصائية .

4) – أنشئ مبيانا لهذه المتسلسلة الإحصائية .

تمرين 2

الكشف الآتي يعطينا عدد السنوات التي قضاها 40 تلميذا في إحدى المؤسسات التعليمية :

5 – 4 – 4 – 3 – 4 – 4 – 3 – 5 – 4 – 4 – 3 – 5 – 4 – 4 – 5 – 3 – 3 – 4 – 3 – 3

4 – 3 – 5 – 4 – 3 – 3 – 5 – 4 – 3 – 3 – 3 – 4 – 5 – 3 – 4 – 4 – 3 – 5 – 4 – 3

1) – أنشئ جدول الحصيصات و الحصيصات المتراكمة .

2) – أنشئ جدول الترددات و الترددات المتراكمة .

3) – أحسب المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة الإحصائية .

4) – أنشئ المخطط بالعصي لهذه المتسلسلة الإحصائية .

تمرين 3

الجدول الآتي يعطينا عدد الأطفال في كل عائلة .

عدد الأطفال	1	2	3	4	5	6
عدد العائلات	5	6	12	10	3	4

1) – أنشئ جدول الحصيصات المتراكمة و الترددات و الترددات المتراكمة .

2) – أحسب المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة الإحصائية .

3) – أنشئ مبيانا لهذه المتسلسلة الإحصائية .

تمرين 4

بعد القيام بدراسة إحصائية حول عدد الساعات الإضافية التي أنجزها مجموعة من العمال بإحدى الشركات حصلنا على الكشف الآتي :

$$4-3-3-2-3-3-5-4-5-4-2-4$$

$$2-2-3-4-5-2-1-3-4-3-2-1$$

1) – كم عدد عمال هذه الشركة ؟

2) – أنشئ جدول الحصيصات و الحصيصات المتراكمة .

3) – أنشئ جدول الترددات و الترددات المتراكمة .

4) – أحسب المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة الإحصائية .

5) – أنشئ المخطط العصوي لهذه المتسلسلة الإحصائية .

6) – حدد النسبة المئوية لعدد العمال الذين أنجزوا 3 ساعات إضافية .

تمرين 5

يعطينا الجدول الآتي توزيعا لعدد من المعامل حسب عدد عمالها .

الصنف (عدد العمال)	$10 \le x < 20$	$20 \le x < 30$	$30 \le x < 40$	$40 \le x < 50$	$50 \le x < 60$
الحصيص (عدد المعامل)	6	2	4	6	2

1) – أنشئ جدول الحصيصات المتراكمة .

2) – أنشئ جدول الترددات و الترددات المتراكمة .

3) – أحسب المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة الإحصائية .

4) – أنشئ مدراج الحصيصات لهذه المتسلسلة الإحصائية .

تمرين 6

الجدول الآتي يعطينا قامات مجموعة من تلاميذ إحدى الإعداديات :

الصنف	$140 \le t < 145$	$145 \le t < 150$	$150 \le t < 155$	$155 \le t < 160$	$160 \le t < 165$	$165 \le t < 170$
الحصيص	10	18	45	35	20	12

1) – أنشئ جدول الحصيصات المتراكمة .

2) – أنشئ جدول الترددات و الترددات المتراكمة .

3) – أحسب المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة الإحصائية .

4) – أنشئ مدراج الحصيصات لهذه المتسلسلة الإحصائية .

تمرين 7

الكشف الآتي يعطي معطيات حول الامدة الزمنية بالدقائق التي تستغرقها مجموعة من التلاميذ للوصول من منازلهم إلى المدرسة .

15 - 10 - 15 - 20 - 10 - 25 - 20 - 15 - 10 - 5

15 - 15 - 5 - 15 - 25 - 10 - 20 - 15 - 15 - 20

1) – كون جدولا للحصيصات و الحصيصات المتراكمة .

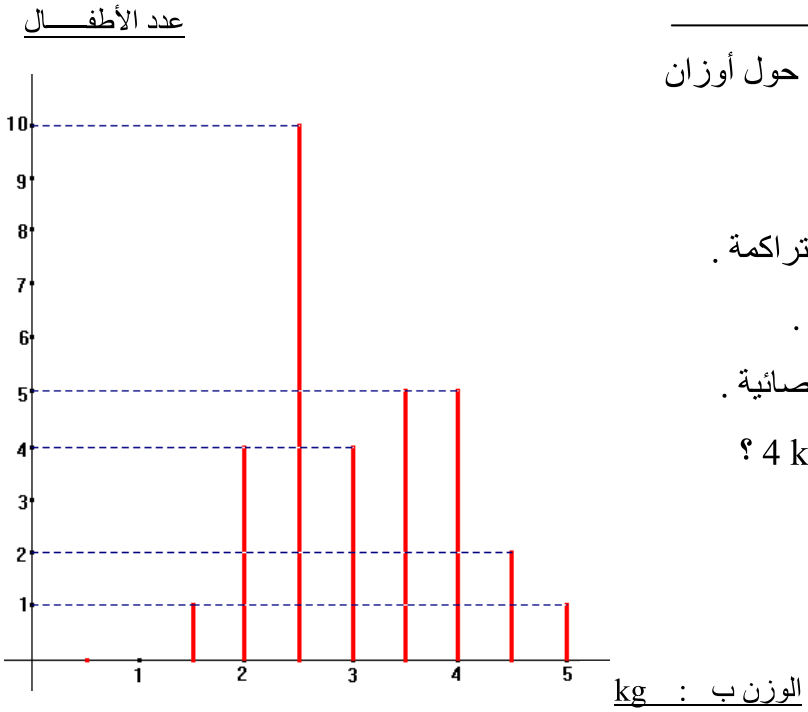
2) – كون جدولا للترددات و الترددات المتراكمة .

3) – أحسب المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة الإحصائية .

4) – أنشئ التمثيل المبياني العصوي للحصيصات

تمرين 8

المبيان جانبه يمثل معلومات حول أوزان مواليد جدد بإحدى المستشفيات .



1) – كون جدول الحصيصات و الحصيصات المتراكمة .

2) – كون جدول الترددات و الترددات المتراكمة .

3) – أحسب المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة الإحصائية .

4) – ما هي بسبة المواليد الذين يقل وزنهم عن 4 kg ؟

تمرين 9

سجلت مصلحة الأرصاد الجوية خلال شهر يناير في إحدى المدن درجات الحرار اليوميه كالتالي :

درجات الحرارة	0	1	3	5	8	10	15
عدد الأيام	2	4	9	4	8	2	1

1) – كون جدول الحصيصات المتراكمة و جدول الترددات و الترددات المتراكمة .

2) – ما هي الحرارة المتوسطة لشهر يناير ؟

3) – أنشئ التمثيل المبياني بخط منكسر لهذه المتسلسلة الإحصائية .

تمرين 10

الجدول الآتي يحتوي على توزيع المرضى الذين تم علاجهم بإحدى المستشفيات

و ذلك حسب أعمارهم .

الأعمار بالسنوات	$0 \le a < 16$	$0 \le a < 16$	$0 \le a < 16$	$0 \le a < 16$	$0 \le a < 16$	$0 \le a < 16$
المعالجين	6	4	26	38	28	12

1) – أنشئ جدول الحصيصات المتراكمة .

2) – كون جدول الترددات المتراكمة .

3) – أحسب المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة الإحصائية .

4) – مثل هذه المتسلسلة الإحصائية بمخطط بالقضبان .

تمرين 11

تشغل شركة 18 موظفا أجرهم كالتالي :

الأجر بالدرهم	1210	1440	1500	12000
عدد الموظفين	7	7	3	1

1) – كون جدول الحصيصات المتراكمة و الترددات و الترددات المتراكمة .

2) – أحسب معدل الأجر .

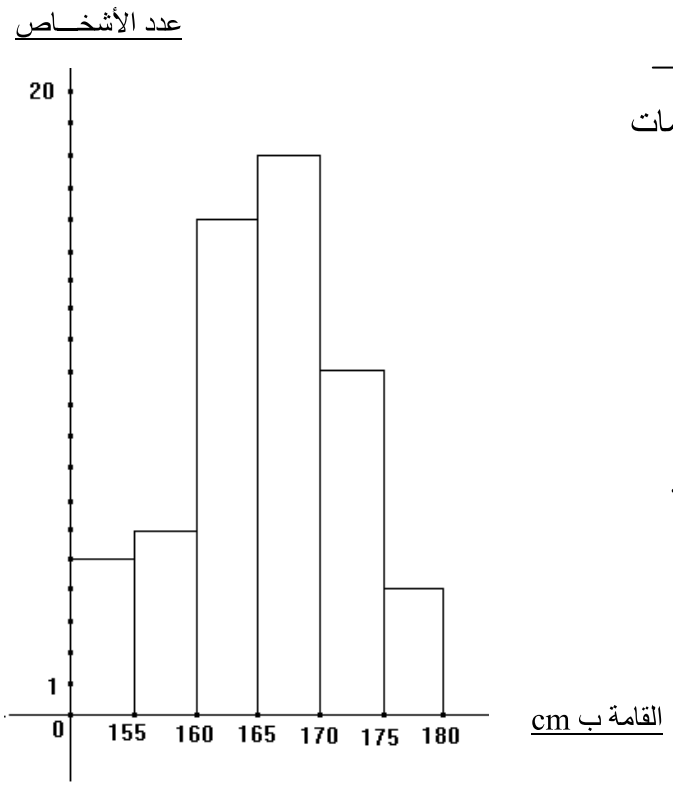
3) – ما هو عدد الموظفين الذين يتقاضون أجرة أصغر من هذا المعدل ؟ ماذا تلاحظ ؟

4) – أنشئ تمثيلا مبيانيا لهذه المتسلسلة الإحصائية .

تمرين 12

المبيان جانبه يمثل معطيات حول قامات

مجموعة من الأشخـاص .



1) – كون جدول الحصيصات و الحصيصات المتراكمة .

2) – كون جدول الترددات و الترددات المتراكمة .

3) – أحسب المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة الإحصائية .

4) – كون جدول النسب المئوية لهذه المتسلسلة الإحصائية .

5) – مثل هذه المتسلسلة الإحصائية بمخطط قطاعي .

الموشور القائم-الهرم-المخروط الدوراني

تمرين 1

في الشكل جانبه :

$AB = 3cm$ و $AC = 4cm$ و $AE = 8cm$

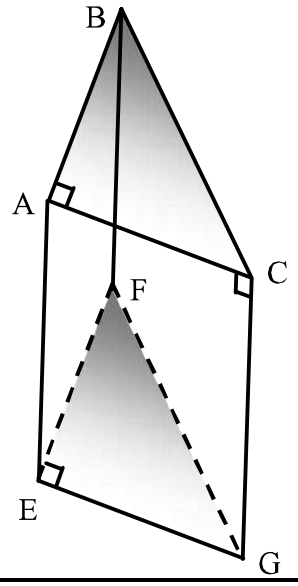
1- احسب حجم هذا المجسم

2- احسب المساحة الجانبية

3- احسب المساحة الكليـــة

4- احسب حجم المجسم $BEFG$

5- احسب حجم المجسم $FACGE$



تمرين 2

الشكل جانبه يمثل مخروطا دورانيا حيث :

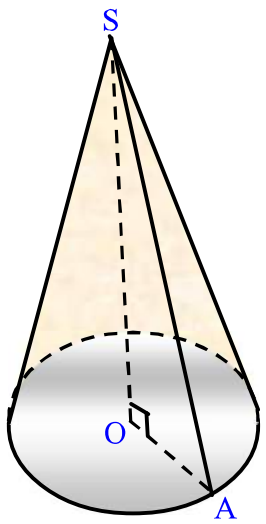
$OA = 6cm$ و $OS = 8cm$

1- احسب حجم هذا المجسم

2- احسب : AS

3- احسب المساحة الجانبيـــة

4- احسب المساحة الكليـــة



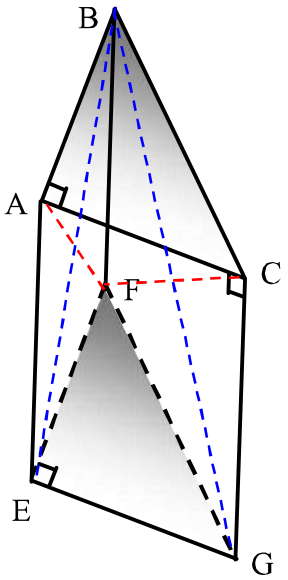
الموشور القائم -الهرم – المخروط الدوراني - حلول

تمرين 1

انتبه ← تعليق ←

معطيات:

$AB = 3cm$ و $AC = 4cm$ و $AE = 8cm$



1- لنحسب حجم هذا المجسم

$$V = S_{ABC} \times AE$$
$$V = \frac{AB \times AC}{2} \times AE$$
$$V = \frac{3 \times 4}{2} \times 8$$
$$V = 6 \times 8$$
$$V = 48\ cm^3$$

2- لنحسب المساحة الجانبية

$$S_L = P_{ABC} \times AE$$
$$S_L = (AB + BC + AC) \times AE$$

يجب أن نحسب أولا BC ، لدينا حسب مبرهنة فيتاغورس :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$
$$BC^2 = 3^2 + 4^2$$
$$BC^2 = 9 + 16$$
$$BC^2 = 25$$
$$BC = 5$$

منه :

$$S_L = (3 + 5 + 4) \times 8$$
$$S_L = 12 \times 8$$
$$S_L = 96\,cm^2$$

← P_{ABC} تمثل محيط القاعدة ABC

3- لنحسب المساحة الكلية

$$S_T = S_L + 2 \times S_{ABC}$$
$$S_T = 96 + 2 \times 6$$
$$S_T = 96 + 12$$
$$S_T = 108\ cm^2$$

← مساحة القاعدة S_{ABC} سبق حسابها في السؤال 1

4- لنحسب حجم المجسم $BEFG$

$BEFG$ هو هرم قاعدته هي المثلث EFG

$$V_{BEFG} = \frac{1}{3} \times S_{EFG} \times BF$$

إذن :

$$V_{BEFG} = \frac{1}{3} \times 6 \times 8$$
$$V_{BEFG} = \frac{48}{3} = 16\ cm^3$$

← $1\ BF = AE = 8$ و $S_{EFG} = S_{ABC} = 6$

5- لنحسب حجم المجسم $FACGE$

المجسم $FACGE$ عبارة عن هرم مستطيل القاعدة ارتفاعه هو EF (لأن المستقيم (EF) عمودي على القاعدة $(ACGE)$)، إذن حجمه هو :

$$V_{FACGE} = \frac{1}{3} \times S_{ACGE} \times EF$$
$$V_{FACGE} = \frac{1}{3} \times (AC \times AE) \times EF$$

منه :

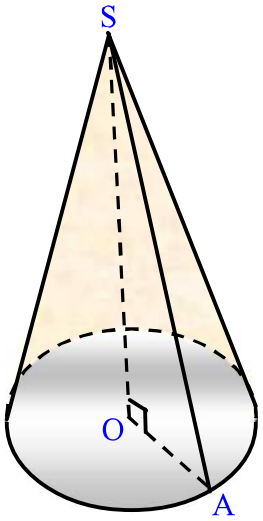
$$V_{FACGE} = \frac{1}{3} \times (4 \times 8) \times 3$$
$$V_{FACGE} = \frac{1}{3} \times 32 \times 3$$
$$V_{FACGE} = 32\ cm^3$$

تمرين 2

انتبه ← تعليق ←

معطيات:

$OS = 8\,cm$ و $OA = 6\,cm$



1- لنحسب حجم هذا المجسم

$$V = \frac{1}{3} \times S_B \times OS$$

$$V = \frac{1}{3} \times \pi \times R^2 \times OS$$

$$V \approx \frac{1}{3} \times 3{,}14 \times 36 \times 8$$

$$V \approx 301{,}44\,cm^3$$

← النتيجة تقريبية لكون العدد π ليست له قيمة مظبوطة

2- لنحسب AS

بما أن OS هو ارتفاع المخروط الدوراني فإن المثلث OAS مثلث قائم الزاوية في النقطة O ، إذن :

$$AS^2 = OS^2 + OA^2$$

$$AS^2 = 8^2 + 6^2$$

$$AS^2 = 64 + 36$$

$$AS^2 = 100$$

$$AS = 10\,cm$$

← AS يسمى **العامــد**

3- لنحسب المساحة الجانبية

نعلم أن المساحة الجانبية للمخروط الدوراني هي :

$$S_L = \pi \times R \times SA$$

$$S_L = \pi \times 6 \times 10$$

$$S_L = 188{,}4\ cm^2$$

4- لنحسب المساحة الكلية

$$S_T = S_L + S_B$$

$$S_T = \pi \times R \times SA + \pi \times R^2$$

$$S_T = 188{,}44 + 3{,}14 \times 36$$

$$S_T = 188{,}44 + 113{,}04$$

$$S_T = 301{,}48\ cm^2$$

← S_B تمثل مساحة القاعدة